

Κεφάλαιο 3

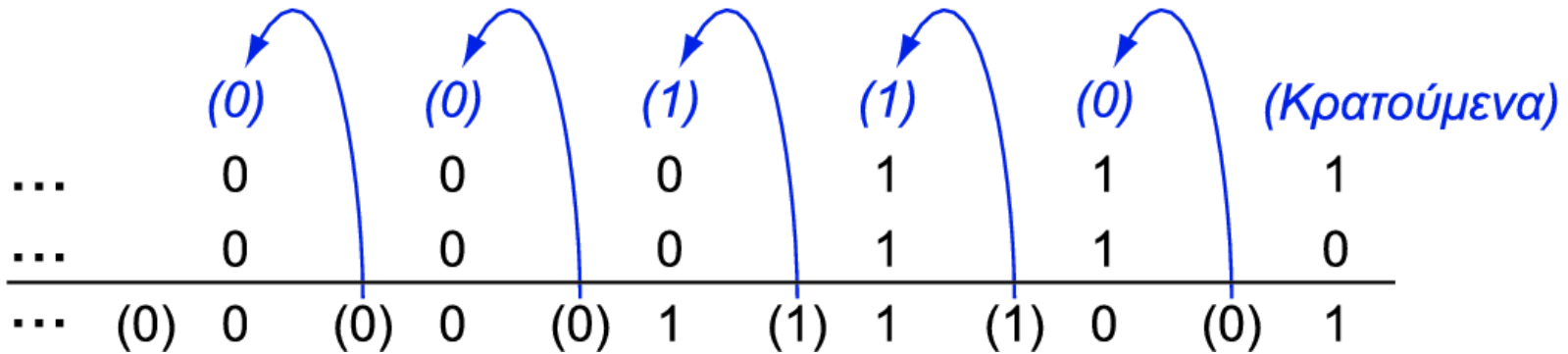
**Αριθμητική για
υπολογιστές**

Αριθμητική για υπολογιστές

- Λειτουργίες (πράξεις) σε ακεραίους
 - Πρόσθεση και αφαίρεση
 - Πολλαπλασιασμός και διαίρεση
 - Χειρισμός της υπερχείλισης
- Πραγματικοί αριθμοί κινητής υποδιαστολής (floating-point)
 - Αναπαράσταση και λειτουργίες (πράξεις)

Ακέραια πρόσθεση

- Παράδειγμα: $7 + 6$



- Υπερχείλιση (overflow) αν το αποτέλεσμα είναι εκτός του εύρους των τιμών
 - Πρόσθεση ετερόσημων τελεστών, όχι υπερχείλιση
 - Πρόσθεση θετικών τελεστών
 - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 1
 - Πρόσθεση αρνητικών τελεστών
 - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 0

Ακέραια αφαίρεση

- Πρόσθεση του αντιθέτου του δεύτερου τελεστέου

- Παράδειγμα: $7 - 6 = 7 + (-6)$

$$\begin{array}{r} +7: \quad 0000 \ 0000 \ \dots \ 0000 \ 0111 \\ -6: \quad 1111 \ 1111 \ \dots \ 1111 \ 1010 \\ \hline +1: \quad 0000 \ 0000 \ \dots \ 0000 \ 0001 \end{array}$$

- Υπερχείλιση αν το αποτέλεσμα είναι εκτός του εύρους των τιμών
 - Αφαίρεση δύο θετικών ή δύο αρνητικών, όχι υπερχείλιση
 - Αφαίρεση θετικού από αρνητικό τελεστέο
 - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 0
 - Αφαίρεση αρνητικού από θετικό τελεστέο
 - Υπερχείλιση αν το πρόσημο του αποτελέσματος είναι 1

Χειρισμός της υπερχείλισης

- Μερικές γλώσσες (π.χ., C) αγνοούν την υπερχείλιση
 - Χρησιμοποιούν τις εντολές του MIPS `addu`, `addui`, `subu`
- Άλλες γλώσσες (π.χ., Ada, Fortran) απαιτούν τη δημιουργία μιας εξαίρεσης
 - Χρησιμοποιούν τις εντολές του MIPS `add`, `addi`, `sub`
 - Στην υπερχείλιση, καλείται ο χειριστής εξαιρέσεων
 - Αποθήκευση του PC στο μετρητή προγράμματος εξαιρέσεων (exception program counter – EPC)
 - Άλμα στην προκαθορισμένη διεύθυνση του χειριστή
 - Η εντολή `mfc0` (move from coprocessor reg) μπορεί να ανακτήσει την τιμή του EPC, για να γίνει επιστροφή μετά τη διορθωτική ενέργεια

Πολλαπλασιασμός

- Ξεκινάμε με τον πολ/σμό μεγάλου μήκους

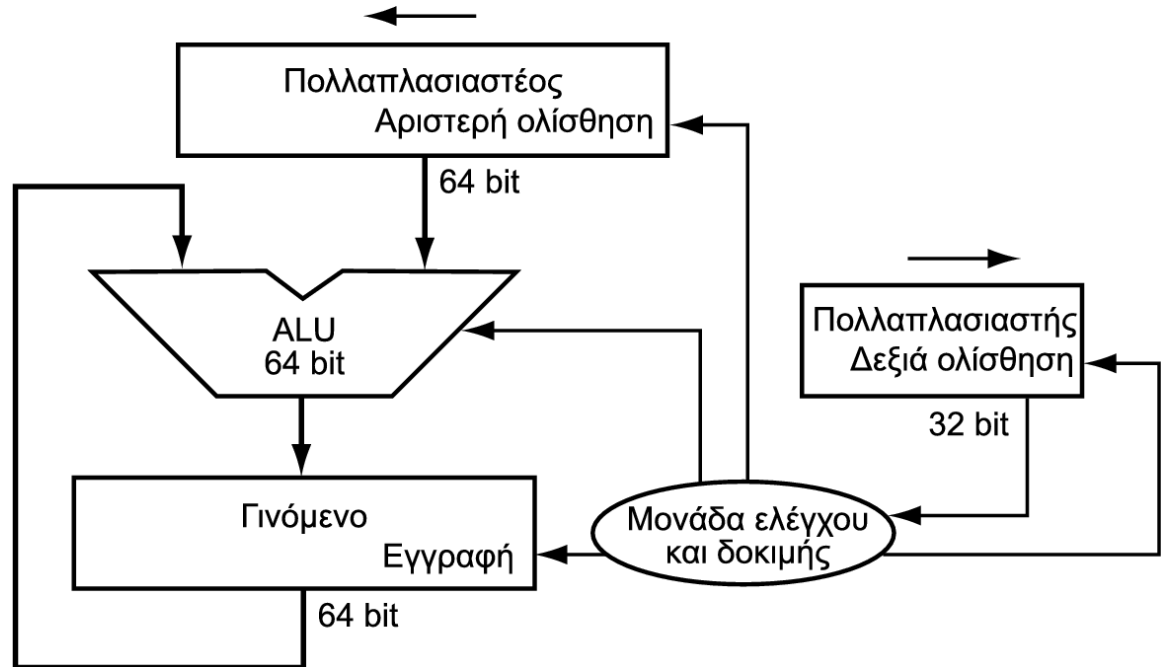
πολλαπλασιαστέος

πολλαπλασιαστής

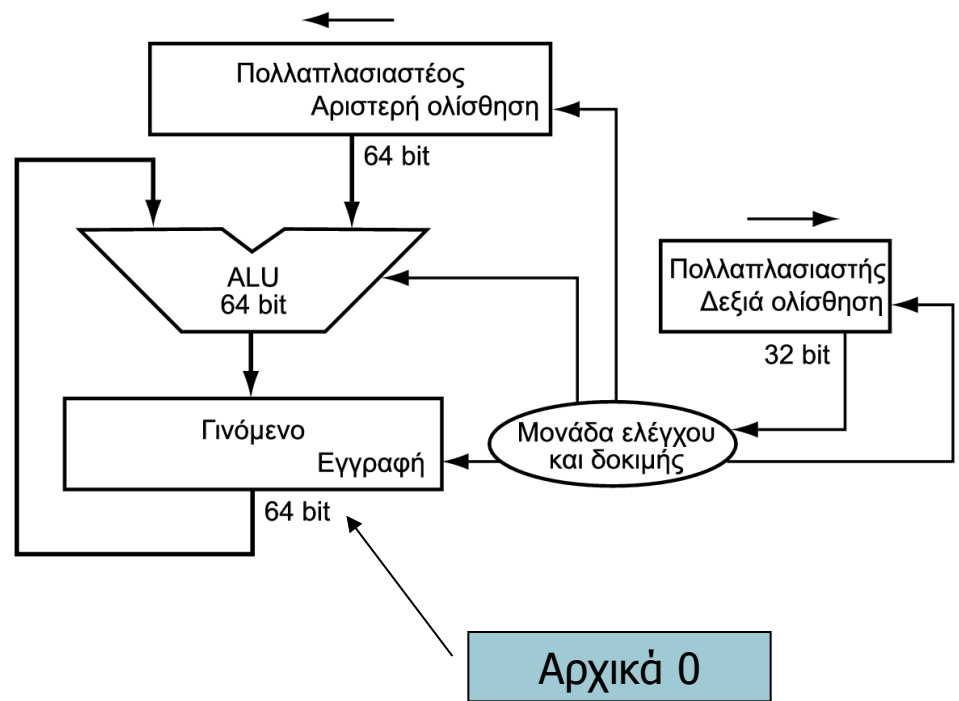
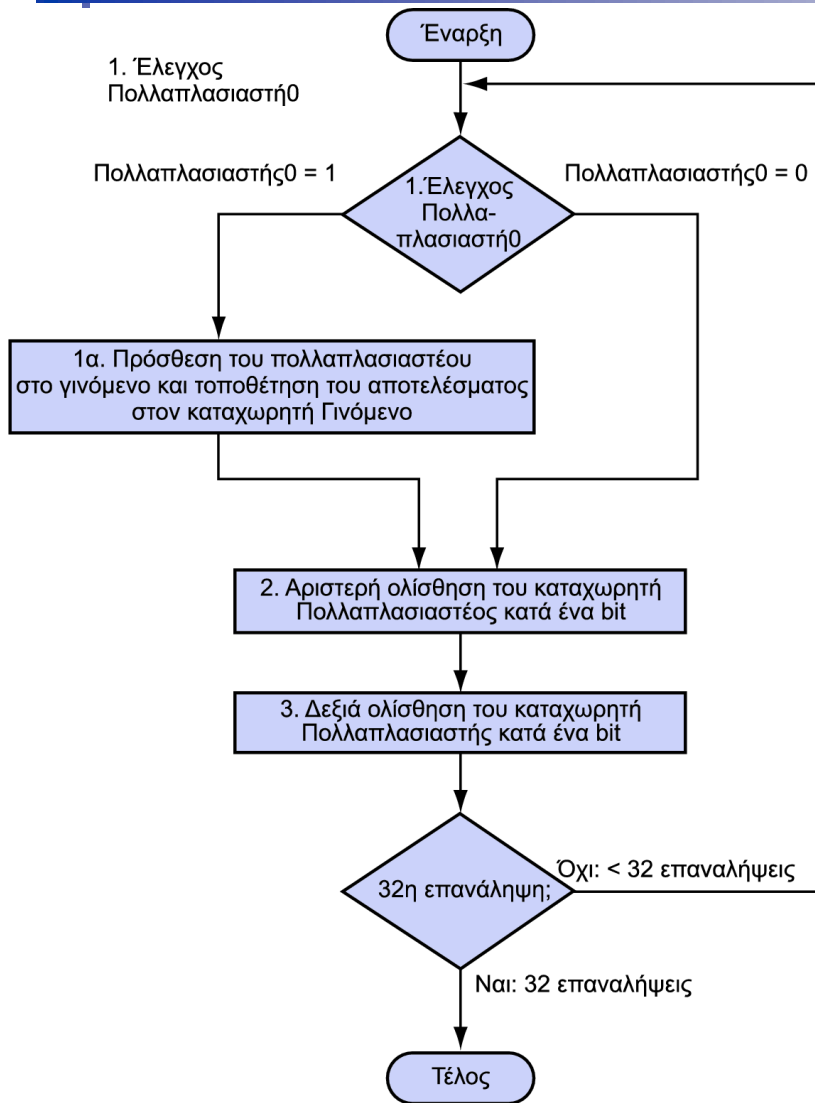
$$\begin{array}{r}
 1000 \\
 \times 1001 \\
 \hline
 1000 \\
 0000 \\
 0000 \\
 1000 \\
 \hline
 1001000
 \end{array}$$

γινόμενο

Το μήκος του γινομένου είναι το άθροισμα των μηκών των τελεστών

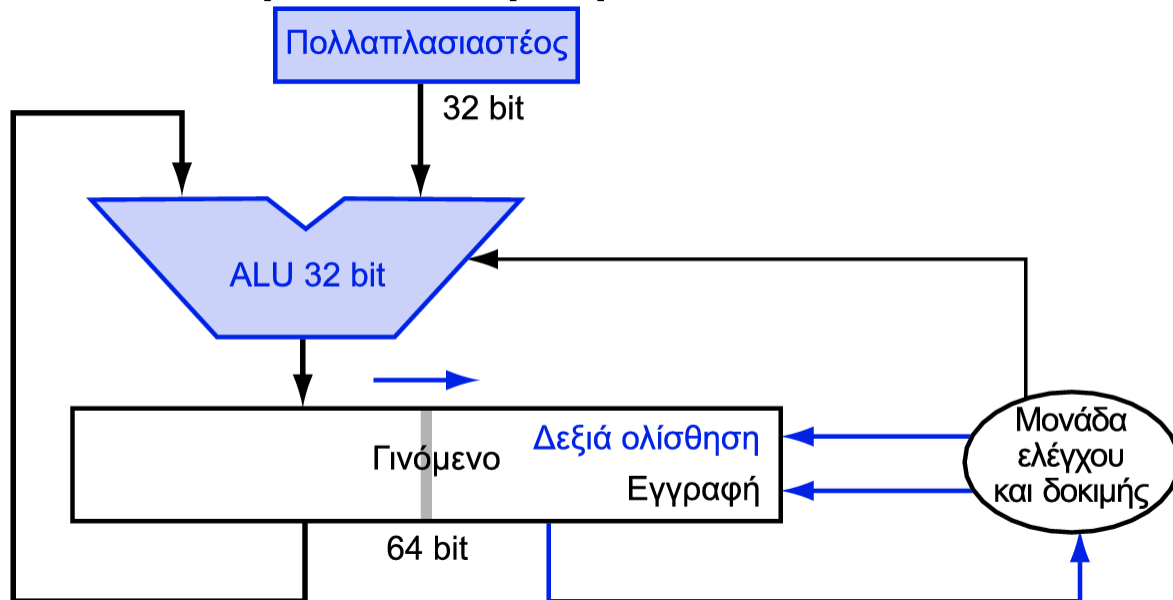


Υλικό πολλαπλασιασμού



Βελτιστοποιημένος πολλαπλασιαστής

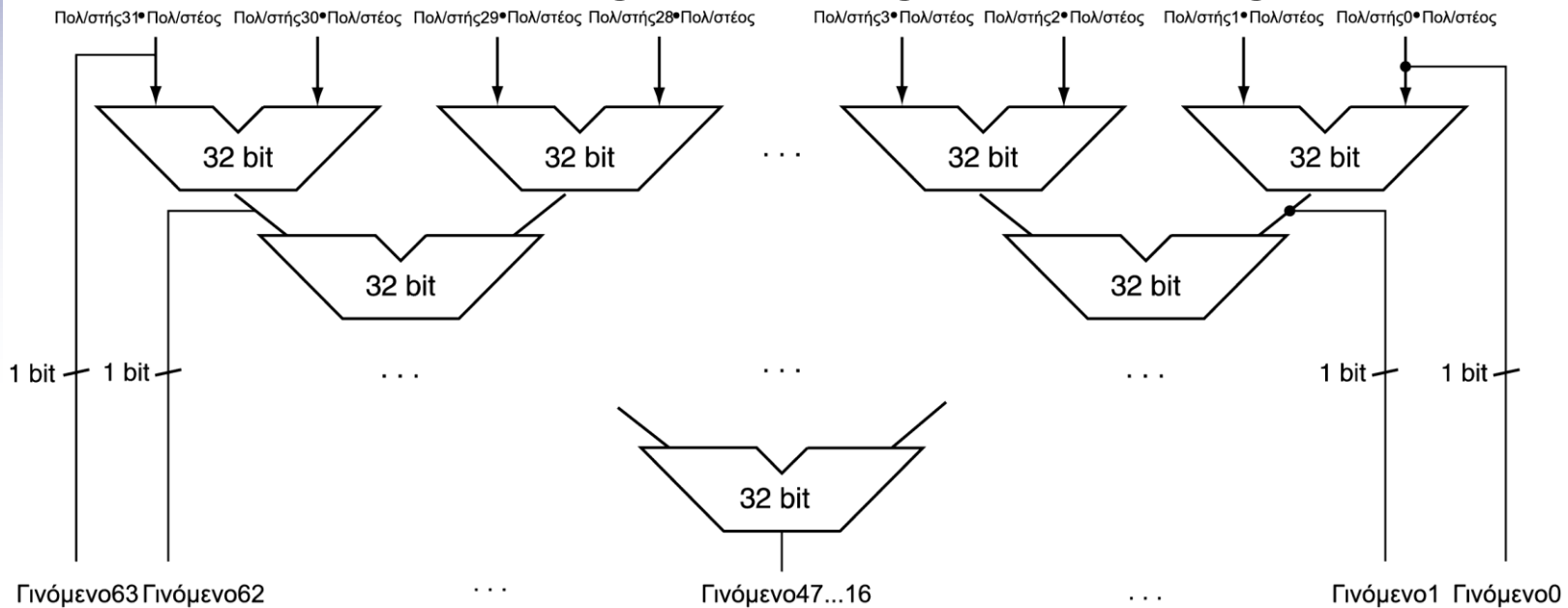
- Εκτέλεση βημάτων παράλληλα: πρόσθεση/ολίσθηση



- Ένας κύκλος ανά πρόσθεση μερικού γινομένου
 - Είναι εντάξει, αν η συχνότητα εμφάνισης του πολλαπλασιασμού είναι χαμηλή

Ταχύτερος πολλαπλασιαστής

- Χρησιμοποιεί πολλούς αθροιστές
 - Συμβιβασμός κόστους/απόδοσης

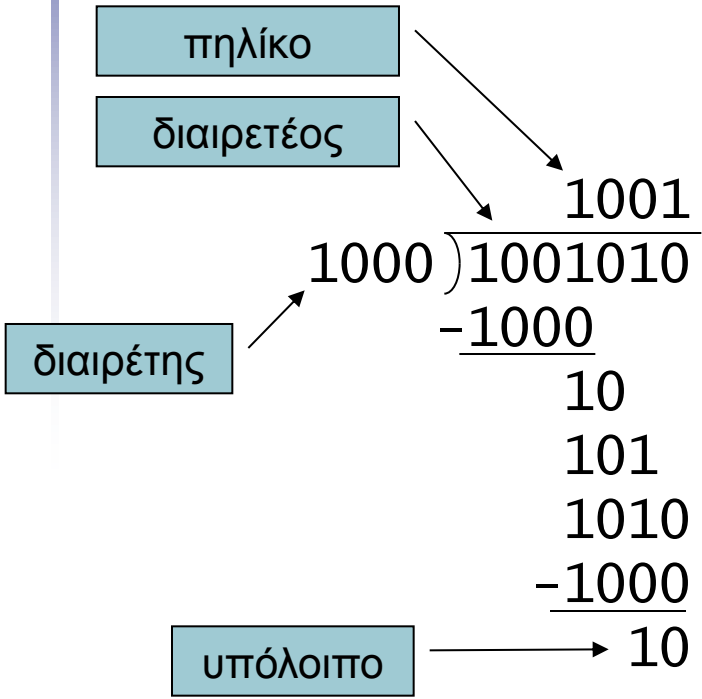


- Μπορεί να υλοποιηθεί με διοχέτευση (pipeline)
 - Πολλοί πολλαπλασιασμοί εκτελούνται παράλληλα

Πολλαπλασιασμός στον MIPS

- Δύο καταχωρητές των 32 bit για το γινόμενο
 - HI: τα περισσότερα σημαντικά 32 bit
 - LO: τα λιγότερα σημαντικά 32 bit
- Εντολές
 - `mult rs, rt / multu rs, rt`
 - γινόμενο των 64 bit στους HI/LO
 - `mghi rd / mflo rd`
 - Μεταφορά από (move from) του HI/LO στον rd
 - Μπορούμε να ελέγξουμε τη τιμή του HI για να δούμε αν το γινόμενο ξεπερνά τα 32 bit
 - `mul rd, rs, rt`
 - Τα λιγότερα σημαντικά 32 bit του γινομένου → rd

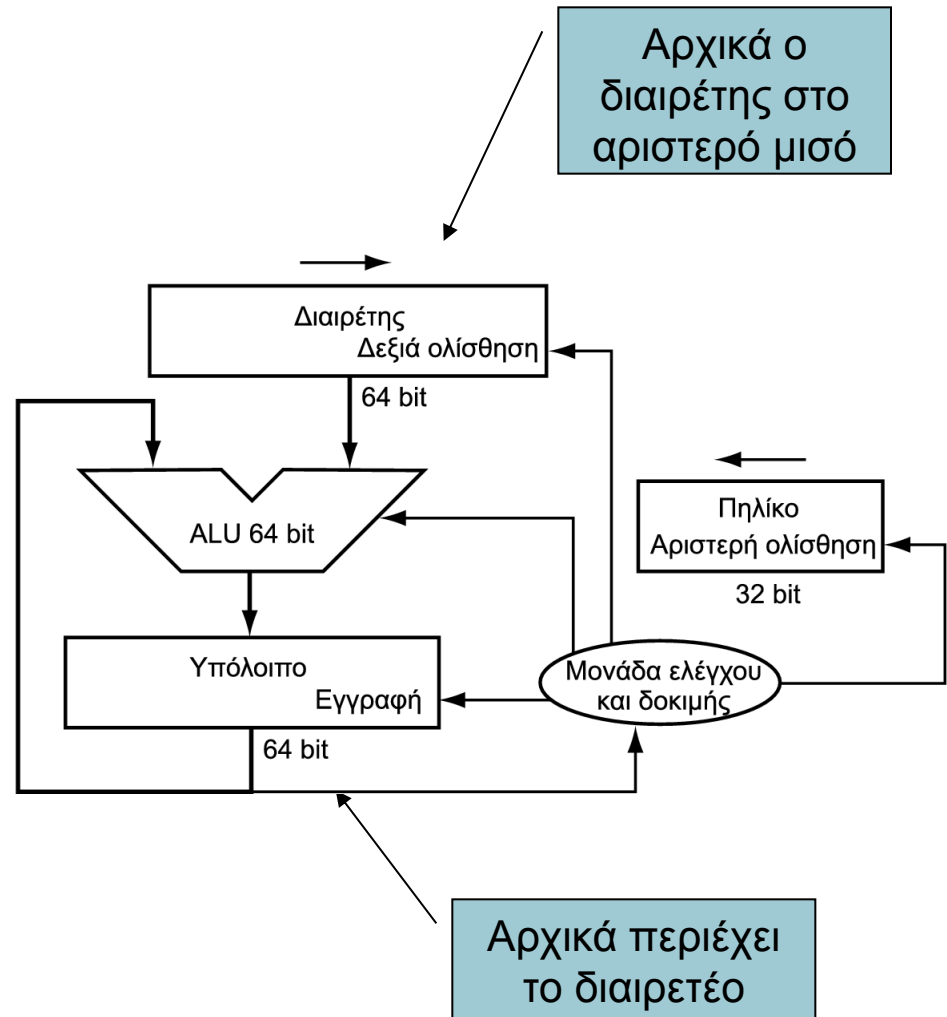
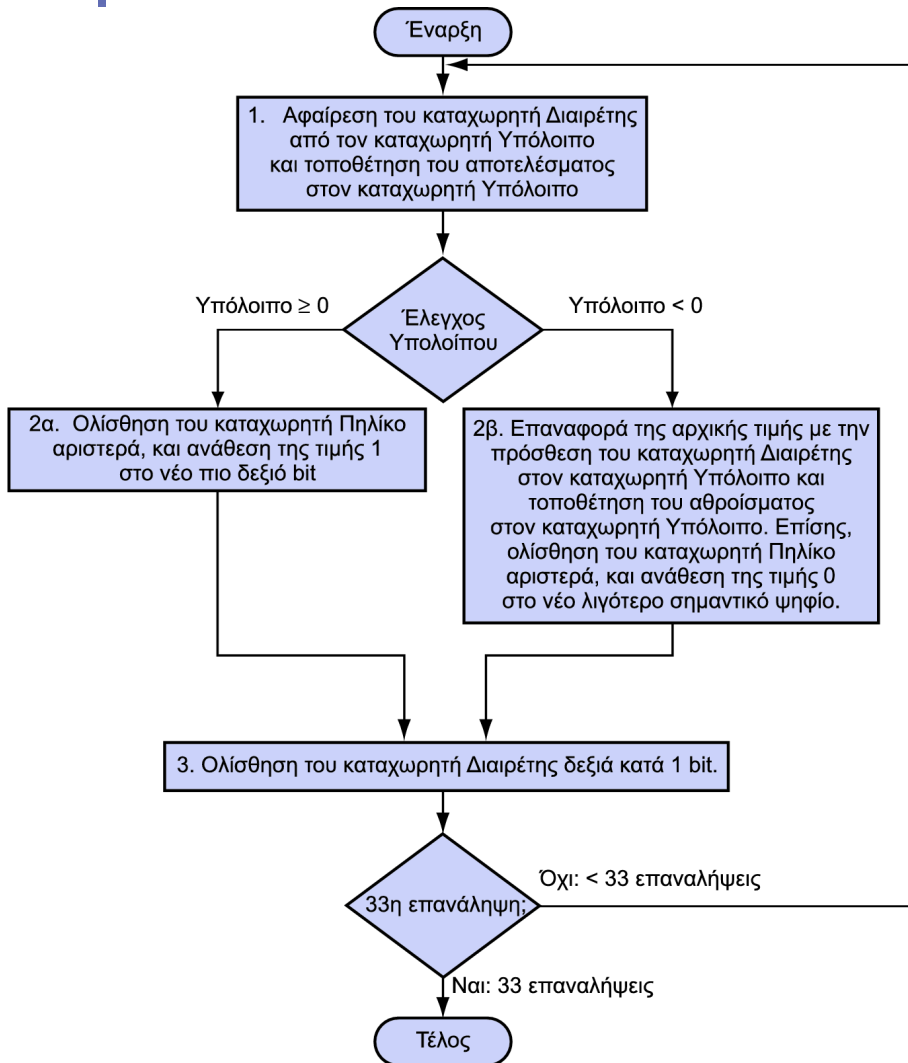
Διαίρεση



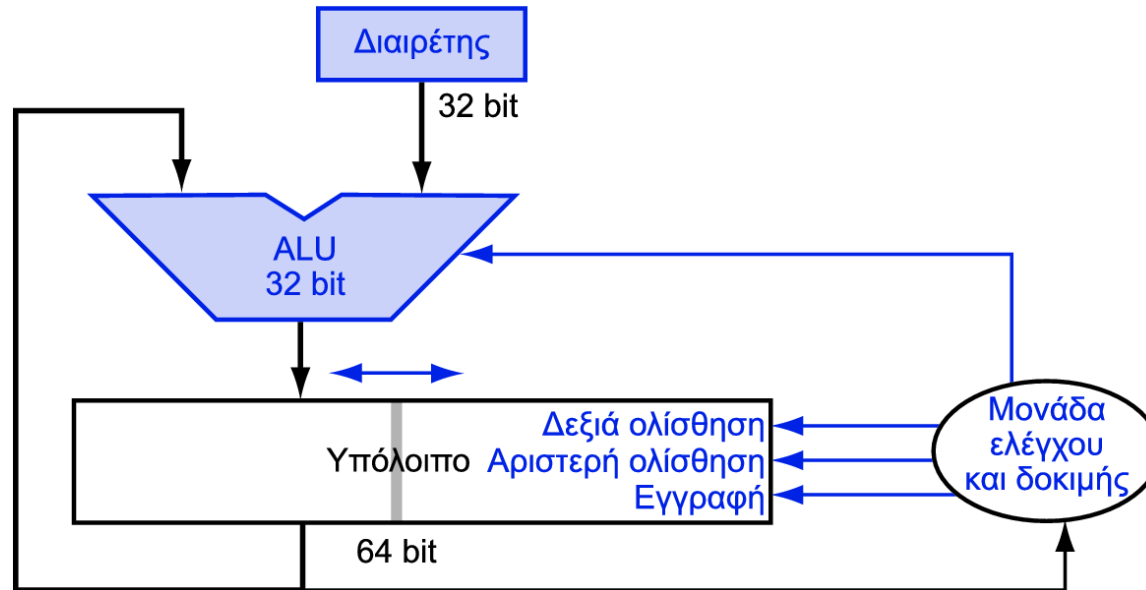
τελεστέοι των n bit δίνουν πηλίκο και υπόλοιπο των n bit

- Έλεγχος για μηδενικό διαιρέτη
- Διαίρεση μεγάλου μήκους
 - Αν διαιρέτης \leq από τα bit του δαιρετέου
 - 1 bit στο πηλίκο, αφαίρεση
 - Αλλιώς
 - 0 bit στο πηλίκο, κατέβασμα του επόμενου bit του δαιρετέου
- Διαίρεση με επαναφορά (restoring division)
 - Κάνε την αφαίρεση και αν το υπόλοιπο γίνει < 0 , πρόσθεσε πίσω το διαιρέτη
- Προσημασμένη διαίρεση
 - Κάνε τη διαίρεση με τις απόλυτες τιμές
 - Ρύθμισε το πρόσημο του πηλίκου και του υπολοίπου όπως απαιτείται

Υλικό διαίρεσης



Βελτιστοποιημένος διαιρέτης



- Ένας κύκλος για κάθε αφαίρεση μερικού υπολοίπου
- Μοιάζει πολύ με πολλαπλασιαστή!
 - Το ίδιο υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τις δύο πράξεις

Ταχύτερη διαίρεση

- Δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί παράλληλο υλικό όπως στον πολλαπλασιαστή
 - Η αφαίρεση εκτελείται υπό συνθήκη, ανάλογα με το πρόσημο του υπολοίπου
- Ταχύτεροι διαιρέτες (π.χ. διαίρεση SRT) δημιουργούν πολλά bit του πηλίκου σε κάθε βήμα
 - Και πάλι απαιτούνται πολλά βήματα

Διαίρεση στο MIPS

- Χρήση των καταχωρητών HI/LO για το αποτέλεσμα
 - HI: υπόλοιπο 32 bit
 - LO: πηλίκo 32 bit
- Εντολές
 - `div rs, rt` / `divu rs, rt`
 - Όχι έλεγχος για υπερχείλιση ή διαίρεση με το 0
 - Το λογισμικό πρέπει να εκτελεί τους ελέγχους αν αυτό απαιτείται
 - Χρήση των `mfhi`, `mflo` για προσπέλαση του αποτελέσματος

Κινητή υποδιαστολή

- Αναπαράσταση για μη ακεραίους αριθμούς
 - Περιλαμβάνει και πολύ μικρούς και πολύ μεγάλους αριθμούς
- Όπως η επιστημονική σημειογραφία (scientific notation)
 - -2.34×10^{56} ← κανονικοποιημένος
 - $+0.002 \times 10^{-4}$ ← μη κανονικοποιημένος
 - $+987.02 \times 10^9$ ← μη κανονικοποιημένος
- Σε δυαδικό
 - $\pm 1.xxxxxxx_2 \times 2^{yyyy}$
- Οι τύποι `float` και `double` της C

Πρότυπο κινητής υποδιαστολής

- Ορίζεται από το IEEE Std 754-1985
- Αναπτύχθηκε ως λύση στην απόκλιση των αναπαραστάσεων
 - Ζητήματα φορητότητας (portability) για τον κώδικα επιστημονικών εφαρμογών
- Πλέον είναι σχεδόν οικουμενικά αποδεκτό
- Δύο αναπαραστάσεις κινητής υποδιαστολής (floating point)
 - Απλή ακρίβεια – single precision (32 bit)
 - Διπλή ακρίβεια – double precision (64 bit)

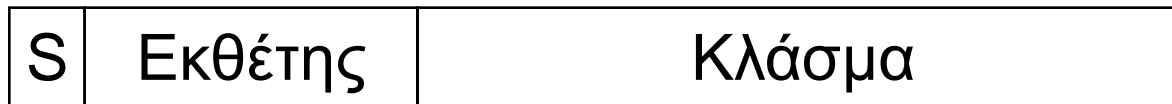
Μορφή κινητής υποδιαστολής IEEE

single: 8 bit

double: 11 bit

single: 23 bit

double: 52 bit



$$x = (-1)^S \times (1 + \text{Κλάσμα}) \times 2^{(\text{Εκθέτης} - \text{Πόλωση})}$$

- Εκθέτης (exponent) – Κλάσμα (fraction)
- S: bit προσήμου (0 \Rightarrow μη αρνητικός, 1 \Rightarrow αρνητικός)
- Κανονικοποίηση του σημαντικού (significand):
 $1.0 \leq |\text{significand}| < 2.0$
 - Έχει πάντα ένα αρχικό bit 1 πριν την υποδιαστολή, και συνεπώς δε χρειάζεται ρητή αναπαράστασή του («κρυμμένο» bit)
 - Το σημαντικό (significand) είναι το κλάσμα (fraction) μαζί με το κρυμμένο “1”
- Εκθέτης: αναπαράσταση «με υπέρβαση» (excess):
πραγματικός εκθέτης + πόλωση (bias)
 - Εγγυάται ότι ο εκθέτης είναι απρόσημος
 - Απλή ακρίβεια: Πόλωση = 127 – Διπλή ακρίβεια: Πόλωση = 1023

Εύρος απλής ακρίβειας

- Οι εκθέτες 00000000 και 11111111 δεσμεύονται
- Μικρότερη τιμή
 - Εκθέτης: 00000001
 \Rightarrow πραγματικός εκθέτης = $1 - 127 = -126$
 - Κλάσμα: 000...00 \Rightarrow σημαντικό = 1.0
 - $\pm 1.0 \times 2^{-126} \approx \pm 1.2 \times 10^{-38}$
- Μεγαλύτερη τιμή
 - Εκθέτης: 11111110
 \Rightarrow πραγματικός εκθέτης = $254 - 127 = +127$
 - Κλάσμα: 111...11 \Rightarrow σημαντικό ≈ 2.0
 - $\pm 2.0 \times 2^{+127} \approx \pm 3.4 \times 10^{+38}$

Εύρος διπλής ακρίβειας

- Οι εκθέτες 0000...00 και 1111...11 δεσμεύονται
- Μικρότερη τιμή
 - Εκθέτης: 000000000001
 \Rightarrow πραγματικός = $1 - 1023 = -1022$
 - Κλάσμα: 000...00 \Rightarrow σημαντικό = 1.0
 - $\pm 1.0 \times 2^{-1022} \approx \pm 2.2 \times 10^{-308}$
- Μεγαλύτερη τιμή
 - Εκθέτης: 111111111110
 \Rightarrow πραγματικός εκθέτης = $2046 - 1023 = +1023$
 - Κλάσμα: 111...11 \Rightarrow σημαντικό ≈ 2.0
 - $\pm 2.0 \times 2^{+1023} \approx \pm 1.8 \times 10^{+308}$

Ακρίβεια κινητής υποδιαστολής

- Σχετική ακρίβεια
 - Όλα τα bit του κλάσματος είναι σημαντικά
 - Απλή: περίπου 2^{-23}
 - Ισοδύναμο με $23 \times \log_{10} 2 \approx 23 \times 0.3 \approx 6$ δεκαδικά ψηφία ακρίβειας
 - Διπλή: περίπου 2^{-52}
 - Ισοδύναμο με $52 \times \log_{10} 2 \approx 52 \times 0.3 \approx 16$ δεκαδικά ψηφία ακρίβειας

Παράδειγμα κινητής υποδιαστολής

- Αναπαράσταση του -0.75
 - $-0.75 = (-1)^1 \times 1.1_2 \times 2^{-1}$
 - $S = 1$
 - Κλάσμα = $1000\dots00_2$
 - Εκθέτης = $-1 + \text{Πόλωση}$
 - Απλή: $-1 + 127 = 126 = 01111110_2$
 - Διπλή: $-1 + 1023 = 1022 = 01111111110_2$
- Απλή: $1011111101000\dots00$
- Διπλή: $1011111111101000\dots00$

Παράδειγμα κινητής υποδιαστολής

- Ποιος αριθμός αναπαρίσταται από τον απλής ακρίβειας κινητής υποδιαστολής αριθμό;

11000000101000...00

- $S = 1$
- Κλάσμα = $01000...00_2$
- Εκθέτης = $10000001_2 = 129$
- $x = (-1)^1 \times (1 + 01_2) \times 2^{(129 - 127)}$
 $= (-1) \times 1.25 \times 2^2$
 $= -5.0$

Μη κανονικοποιημένοι (denormals)

- Εκθέτης = 000...0 \Rightarrow το «κρυμμένο» bit είναι 0

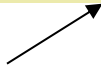
$$x = (-1)^S \times (0 + \text{Κλάσμα}) \times 2^{-\text{Πόλωση}+1}$$

- Μικρότεροι από τους κανονικοποιημένους
 - επιτρέπουν βαθμιαία ανεπάρκεια (gradual underflow), με μειούμενη ακρίβεια

- Denormal με κλάσμα = 000...0

$$x = (-1)^S \times (0 + 0) \times 2^{-\text{Πόλωση}+1} \pm 0.0$$

Δύο αναπαραστάσεις του
0.0!



Άπειρα και όχι αριθμοί (NaN)

- Εκθέτης = 111...1, Κλάσμα = 000...0
 - ±Άπειρο
 - Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε επόμενους υπολογισμούς, για αποφυγή της ανάγκης του ελέγχου υπερχείλισης
- Εκθέτης = 111...1, Κλάσμα \neq 000...0
 - Όχι αριθμός (Not-a-Number – NaN)
 - Δείχνει ένα άκυρο ή απροσδιόριστο αποτέλεσμα
 - π.χ., 0.0 / 0.0
 - Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε επόμενους υπολογισμούς

Πρόσθεση κινητής υποδιαστολής

- Ένα δεκαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
 - $9.999 \times 10^1 + 1.610 \times 10^{-1}$
- 1. Ευθυγράμμιση υποδιαστολών
 - Ολίσθηση αριθμού με το μικρότερο εκθέτη
 - $9.999 \times 10^1 + 0.016 \times 10^1$
- 2. Πρόσθεση σημαντικών
 - $9.999 \times 10^1 + 0.016 \times 10^1 = 10.015 \times 10^1$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος & έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
 - 1.0015×10^2
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποίηση αν είναι απαραίτητο
 - 1.002×10^2

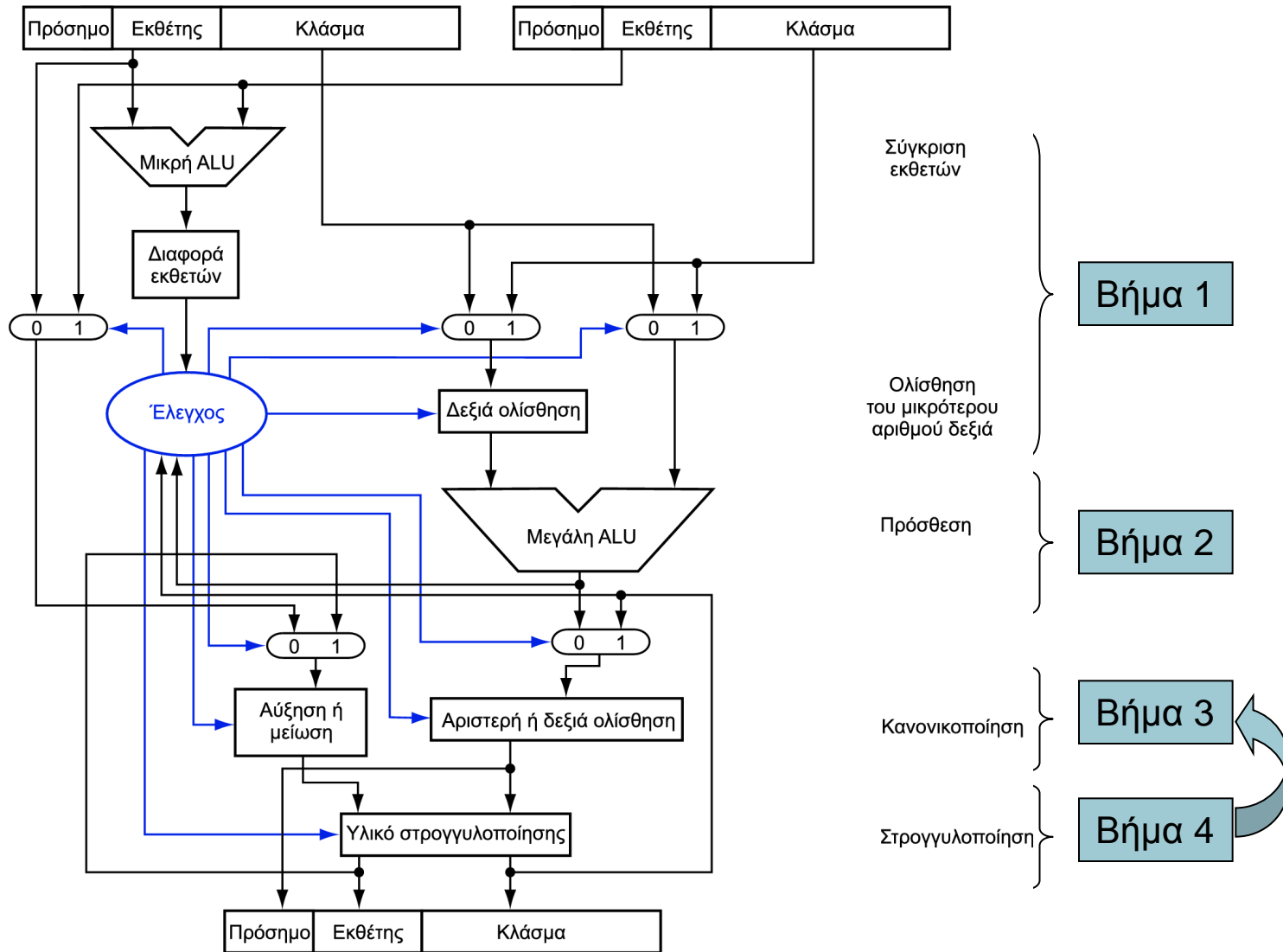
Πρόσθεση κινητής υποδιαστολής

- Τώρα ένα δυαδικό παράδειγμα με 4 ψηφία
 - $1.000_2 \times 2^{-1} + -1.110_2 \times 2^{-2}$ (0.5 + -0.4375)
- 1. Ευθυγράμμιση υποδιαστολών
 - Ολίσθηση αριθμού με το μικρότερο εκθέτη
 - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1}$
- 2. Πρόσθεση σημαντικών
 - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1} = 0.001_2 \times 2^{-1}$
- 3. Κανονικοποίηση αποτελέσματος και έλεγχος υπερχείλισης/ανεπάρκειας
 - $1.000_2 \times 2^{-4}$, χωρίς υπερχείλιση/ανεπάρκεια
- 4. Στρογγυλοποίηση και επανακανονικοποίηση αν είναι απαραίτητο
 - $1.000_2 \times 2^{-4}$ (καμία αλλαγή) = 0.0625

Υλικό αθροιστή κιν. υποδ.

- Πολύ πιο πολύπλοκο από του ακέραιου αθροιστή
- Για να γίνει σε έναν κύκλο πρέπει να έχει πολύ μεγάλη διάρκεια
 - Πολύ μεγαλύτερη από τις ακέραιες λειτουργίες
 - Το πιο αργό ρολόι θα επιβάρυνε όλες τις εντολές
- Ο αθροιστής κινητής υποδιαστολής συνήθως παίρνει πολλούς κύκλους
 - Μπορεί να υπολοποιηθεί με διοχέτευση

Υλικό αθροιστή ΚΙΝ.ΥΠΟΔ.



Υλικό αριθμητικής ΚΙΝ. ΥΠΟΔ.

- Ο πολλαπλασιαστής ΚΥ έχει παρόμοια πολυπλοκότητα με τον αθροιστή ΚΥ
 - Αλλά χρησιμοποιεί πολλαπλασιαστή για τα σημαντικά αντί για αθροιστή
- Το υλικό αριθμητικής ΚΙΝ. ΥΠΟΔ. συνήθως εκτελεί
 - Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, αντίστροφο, τετραγωνική ρίζα
 - Μετατροπή ΚΥ \leftrightarrow ακέραιο
- Οι λειτουργίες συνήθως διαρκούν πολλούς κύκλους
 - Μπορούν να υπολοποιηθούν με διοχέτευση

Εντολές ΚΥ στο MIPS

- Το υλικό ΚΥ είναι ο συνεπεξεργαστής (coprocessor) 1
 - Επιπρόσθετος επεξεργαστής που επεκτείνει την αρχιτεκτονική συνόλου εντολών
- Ξεχωριστοί καταχωρητές ΚΥ
 - 32 απλής ακρίβειας: \$f0, \$f1, ... \$f31
 - Ζευγάρια για διπλή ακρίβεια: \$f0/\$f1, \$f2/\$f3, ...
 - Η έκδοση 2 του συνόλου εντολών MIPS υποστηρίζει 32 × 64 bit καταχωρητές ΚΥ
- Εντολές ΚΥ επενεργούν μόνο σε καταχωρητές ΚΥ
 - Γενικά τα προγράμματα δεν εκτελούν αέριες πράξεις σε δεδομένα ΚΥ, ή αντίστροφα
 - Περισσότεροι καταχωρητές με ελάχιστη επίδραση στο μέγεθος του κώδικα
- Εντολές φόρτωσης και αποθήκευσης ΚΥ
 - lwc1, ldc1, swc1, sdc1
 - π.χ., ldc1 \$f8, 32(\$sp)

Εντολές ΚΥ στον MIPS

- Αριθμητική απλής ακρίβειας
 - `add.s`, `sub.s`, `mul.s`, `div.s`
 - π.χ., `add.s $f0, $f1, $f6`
- Αριθμητική διπλής ακρίβειας
 - `add.d`, `sub.d`, `mul.d`, `div.d`
 - π.χ., `mul.d $f4, $f4, $f6`
- Σύγκριση απλής και διπλής ακρίβειας
 - `c.xx.s`, `c.xx.d` (xx είναι `eq`, `lt`, `le`, ...)
 - Δίνει τη τιμή 1 ή 0 σε bit κωδικών συνθήκης ΚΥ (FP condition-code bit)
 - π.χ. `c.lt.s $f3, $f4`
- Διακλάδωση σε αληθή ή ψευδή κωδικό συνθήκης ΚΥ
 - `bc1t`, `bc1f`
 - π.χ., `bc1t TargetLabel`

Παραδειγμα ΚΥ: βαθμοί °F σε °C

- Κώδικας C:

```
float f2c (float fahr) {  
    return ((5.0/9.0)*(fahr - 32.0));  
}
```

- fahr στον \$f12, αποτέλεσμα στον \$f0, οι σταθερές στο χώρο της καθολικής μνήμης

- Μεταγλωττισμένος κώδικας MIPS:

```
f2c: lwc1    $f16, const5($gp)  
     lwc1    $f18, const9($gp)  
     div.s   $f16, $f16, $f18  
     lwc1    $f18, const32($gp)  
     sub.s   $f18, $f12, $f18  
     mul.s   $f0, $f16, $f18  
     jr     $ra
```

Ακριβής αριθμητική

- Το IEEE Std 754 καθορίζει πρόσθετο έλεγχο της στρογγυλοποίησης
 - Επιπλέον bit ακρίβειας (guard, round, sticky)
 - Επιλογή τρόπων στρογγυλοποίησης (rounding modes)
 - Επιτρέπει στον προγραμματιστή να ρυθμίσει με λεπτομέρεια την αριθμητική συμπεριφορά ενός υπολογισμού
- Δεν υλοποιούν όλες τις επιλογές όλες οι μονάδες ΚΥ
 - Οι περισσότερες γλώσσες προγραμματισμού και βιβλιοθήκες ΚΥ χρησιμοποιούν απλώς τις προκαθορισμένες λειτουργίες
- Συμβιβασμός μεταξύ πολυπλοκότητας του υλικού, απόδοσης, και απαιτήσεων της αγοράς

Διερμηνεία των δεδομένων

ΓΕΝΙΚΗ εικόνα

- Τα bit δεν έχουν έμφυτη σημασία
 - Η διερμηνεία εξαρτάται από τις εντολές που εφαρμόζονται
- Αναπαράσταση των αριθμών στους υπολογιστές
 - Πεπερασμένο εύρος και ακρίβεια
 - Πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στα προγράμματα

Δεξιά ολίσθηση και διαίρεση

- Η αριστερή ολίσθηση κατά i θέσεις πολλαπλασιάζει έναν ακέραιο με 2^i
- Η δεξιά ολίσθηση διαιρεί με το 2^i ;
 - Μόνο σε απρόσημους ακεραίους
- Για προσημασμένους ακεραίους
 - Αριθμητική δεξιά ολίσθηση: επανάληψη του προσήμου
 - π.χ., $-5 / 4$
 - $11111011_2 \gg 2 = 11111110_2 = -2$
 - Στρογγυλοποιεί προς το $-\infty$
 - σύγκριση $11111011_2 \ggg 2 = 00111110_2 = +62$

Ποιος νοιάζεται για την ακρίβεια KY;

- Σημαντική για επιστημονικό κώδικα
 - Αλλά για καθημερινή χρήση;
 - “Το υπόλοιπό μου στη τράπεζα διαφέρει κατά 0.0002 σεντ!” ☹
- Το σφάλμα της διαίρεσης KY του Intel Pentium (FDIV bug)
 - Η αγορά αναμένει ακρίβεια
 - Δείτε Colwell, *The Pentium Chronicles*

Συμπερασματικές παρατηρήσεις

- Οι αρχιτεκτονικές συνόλου εντολών υποστηρίζουν αριθμητική
 - Προσημασμένων και απρόσημων ακεραίων
 - Προσεγγίσεων κινητής υποδιαστολής για τους πραγματικούς
- Πεπερασμένο εύρος και ακρίβεια
 - Οι λειτουργίες μπορεί να οδηγήσουν σε υπερχείλιση (overflow) και ανεπάρκεια (underflow)
- Αρχιτεκτονική συνόλου εντολών MIPS
 - Εντολές πυρήνα: οι 54 πιο συχνά χρησιμοποιούμενες
 - 100% του SPECINT, 97% του SPECFP
 - Άλλες εντολές: λιγότερο συχνές